

# 摩擦力對最速降線問題的影響大不大

## Investigation of the Influence of Friction on Brachistochrone

李尚元<sup>1</sup> 林芝渝<sup>2</sup>

Shung-Yuan Sean Lee<sup>1</sup> LIN JHIH-YU<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 宜蘭縣立復興國民中學 學生

<sup>1</sup> Fu-Shing Junior High School of Yilan County Student Student

E-mail : sean7777@smail.ilc.edu.tw

<sup>2</sup> 宜蘭縣立復興國民中學 學生

<sup>2</sup> Fu-Shing Junior High School of Yilan County Student Student

E-mail : kiki115@smail.ilc.edu.tw

### 摘要

「最速降線問題」是指在全程只受重力的影響下，質點從高點滾到低點，所需時間最短的路徑。此問題的理論答案即為一條倒置的擺線。這個問題中的原型理論假設是質點全程只受到重力影響，但是在現實中不可能有這麼完美的環境。所以，我們想知道在現實中最速降線問題裡，摩擦力對於理論答案的影響究竟大不大。

藉由「實體實驗模擬最速降線問題」，再使用「慢動作攝影」逐幀分析觀察，並與擺線比對，發現有摩擦力的情況大約為 $\frac{1}{2}$ 週期擺線，與理論上的答案有很大的差距。

最後，使用壓克力板作為軌道，會因為其本身的彈性，導致軌道的形變難以控制且無法準確量化，希望未來可以找到更好的材料改善此問題。

關鍵字：最速降線、摩擦力、擺線

### Abstract

A brachistochrone curve is lying on a plane, from a given point to the other not directly below the former, along which a bead slides frictionlessly under the influence of a uniform gravitational field in the shortest time. The solution, in theory, to the problem of searching for the curve is an **inverted** cycloid.

However, for a brachistochrone curve in theory, it is based on the assumption of a particle under the unique influence of gravitational field without friction. It is unrealistic to have such frictionless environment, therefore it is to investigate how much the deviation is for a brachistochrone curve to be affected by friction.

Experimental data includes measuring descent times of a spherical steel rolling down along different **curved** surfaces and video shooting in slow motion. The results of the **loci** for the particle motion under gravitational force with friction are further analyzed in comparison with the cycloid. It is concluded that the brachistochrone curve under the influence of friction is approximately  $\frac{1}{2}$  period of cycloid, far from the solution proposed by the theory. Moreover, acrylic-surfaced tracks is difficult to maintain constant reliable data due to its bouncy texture. It is suggested that better material is needed to optimize the experimental condition.

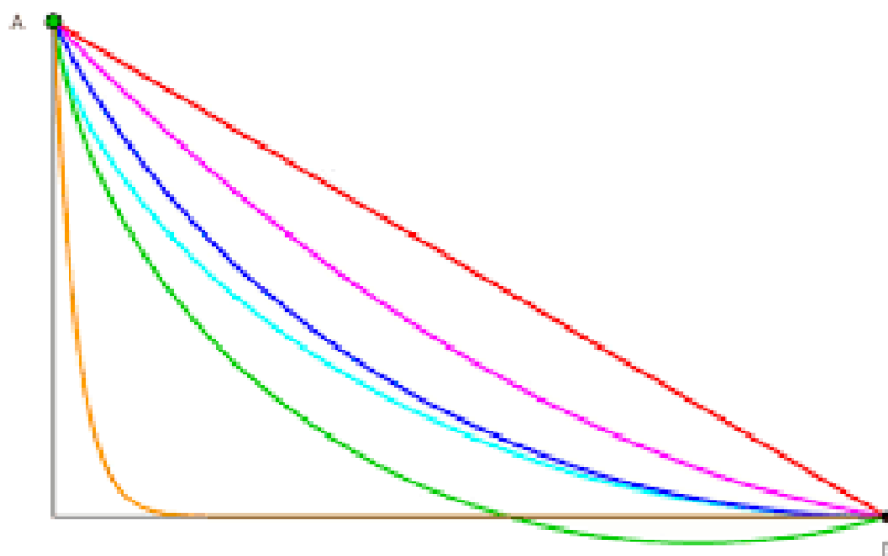
Keyword: brachistochrone curve, friction, cycloid

### 1、前言

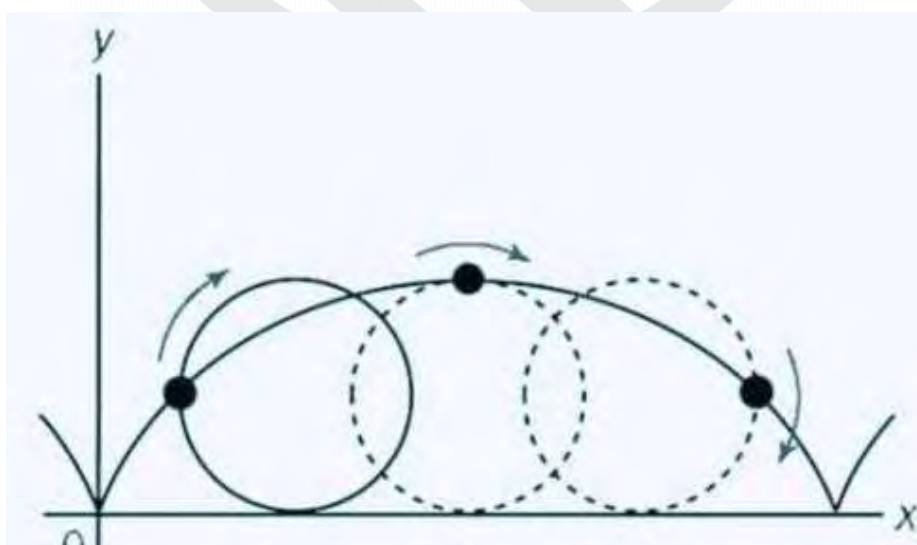
最速降線問題 (Brachistochrone) 是個古老的數學、物理問題，問題如下：假設你正在側視的场景有高低不同的兩個點，且高點不在低點的正上方，若從高點放開一個靜止的質點讓它沿著任一路徑 (直線、曲線、或折線皆可) 滾至低點 (圖一)，期間只有均勻的重力作用，且沒有摩擦力影響，則怎樣的路徑可讓抵達的時間最短。

數學家的推論確定是擺線的一部分。擺線是一個圓沿一條直線滾動時，圓邊界上的固定點所形成的運動軌跡 (圖二)。

但在現實中並不存在這麼理想的空間，所以我們想知道在現實中最速降線問題裡摩擦力對答案的影響究竟大不大。



圖一 最速降線問題 (示意圖)



圖二 擺線的形成

## 2、 研究目的

一、用實體實驗模擬最速降線問題（有摩擦力的情況），與擺線比對尋找出實驗裡最速降線，和理論上的最速降線比較判斷摩擦力對最速降線影響究竟大不大。

二、觀察質點所經過的路徑對抵達時間的影響，並分析其原因。

## 3、 研究實施與設計

一、實驗器材

(一)、鐵球（半徑 1.0 cm），因與壓克力軌道的摩擦力較小，故用來模擬最速降線中的質點（圖三）。



圖三 鐵球

(二)、手機 (iPhone 11)，使用內建 240fps（即每張照片間隔 0.004166 秒）的慢動作攝影鏡頭，紀錄實驗中鐵球抵達的時間和路徑（圖四）。



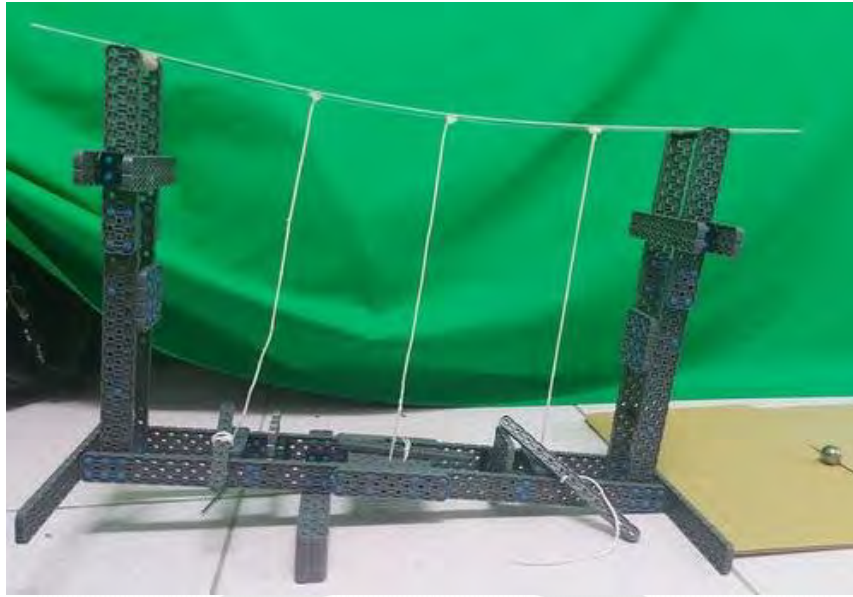
圖四 手機（拍攝用）

(三)、尺（單位公分，最小刻度毫米），用於測量實驗中器材的各種距離的長度（圖五）。



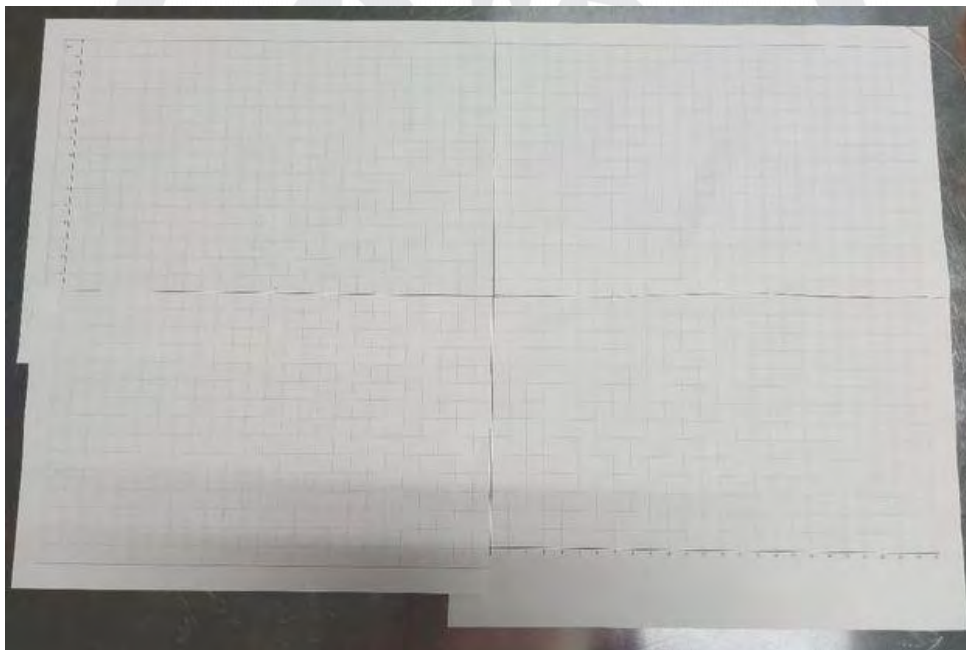
圖五 尺

(四)、壓克力軌道，由 VEX IQ 零件中的塑膠積木條、插銷、塑膠桿組成支架長 44.5 cm 高 38.0 cm 與水平傾斜 6.0 度的支架，接著在透明壓克力板（長 60 cm 寬 4 cm）上取 20.5 cm、31.5cm、43.5cm 三處用熱熔膠把棉繩黏上，並放置在支架上（圖六）。



圖六 VEX 積木.軌道 (壓克力板)

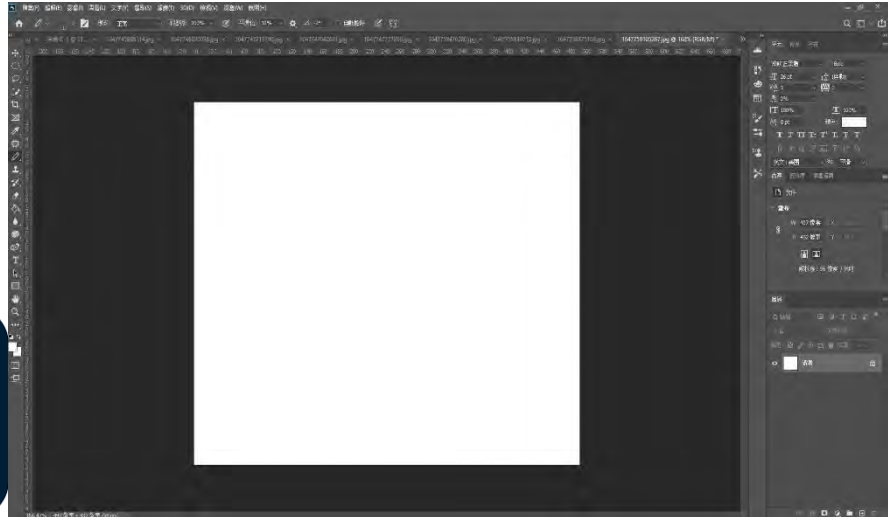
(五)、比例板，用於判斷實驗中物體的相對位置，減少鏡頭對實際距離的影響 (圖七)。



圖七 比例板

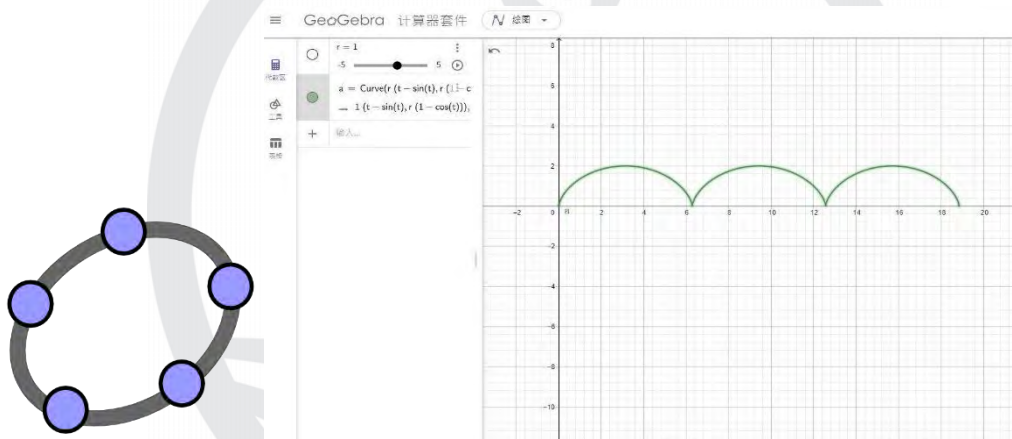
二、分析軟體

(一)、**Adobe Photoshop**，用此軟體來描繪軌道彎曲程度 (圖八)。



圖八 Adobe Photoshop (影像處理軟體) 右邊為使用畫面

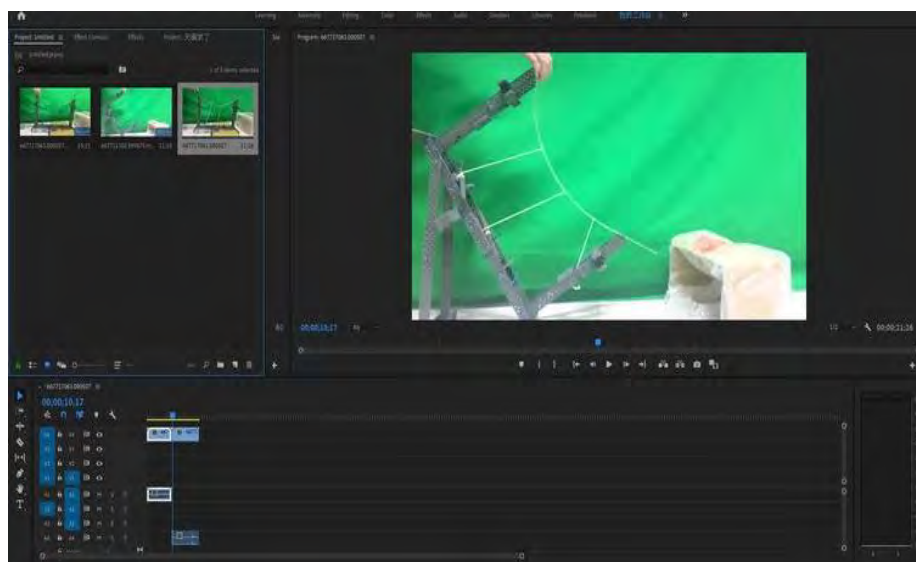
(二)、GeoGebra, 用此軟體輸入指令  $r=1$ 、 $a=Curve(r*(t-\sin(t)), r*(1-\cos(t))), t, 0, 6*\pi$ ), 來繪製擺線。(圖九)



圖九 GeoGebra (數學繪圖軟體) 右邊為使用畫面

(三)、Premiere Pro, 用此軟體來逐幀計算鐵球到達終點所花費的時間。(圖十)





圖十 Premiere Pro (影片編輯軟體) 右邊為使用畫面

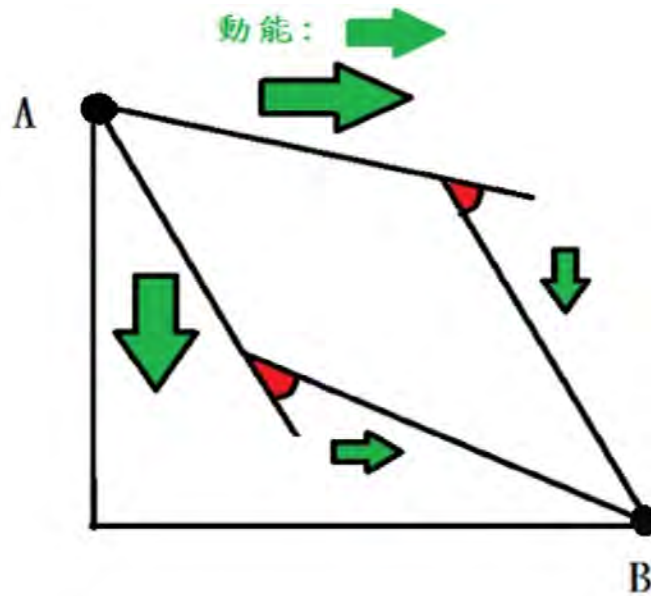
### 三、研究方法

為了研究摩擦力對最速降線的影響究竟大不大，所以設計一個最速降線尋找實驗，由鐵球代替最速降線問題中的質點，由壓克力軌道代替最速降線問題中的路徑，並在實驗中盡量減少摩擦力，接著與擺線比對找出實驗中的最速降線，最後觀察實驗中的最速降線理論上差距是否巨大。

#### (一)、縮小實驗範圍

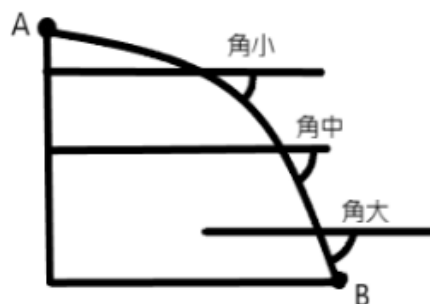
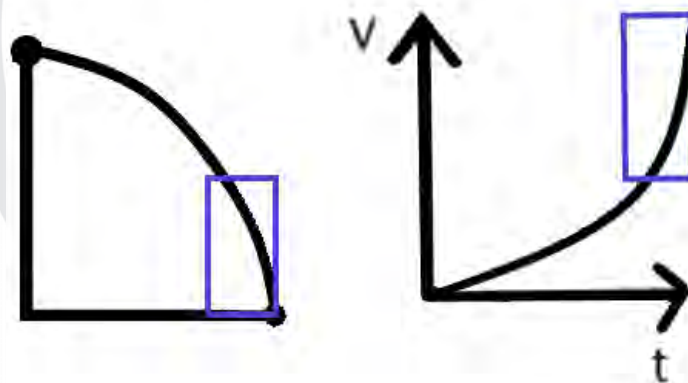
我們一開始就先否定掉折線、上凸曲線、多凹曲線。原因如下：

(一)、折線：當質點經過夾角時，路徑會迫使質點改變方向，此時的動能將有一部分動能用於改向，改變角度越大，動能的消耗也就越多，這些消耗會導致質點速度變慢（圖十一），因此折線不是答案。



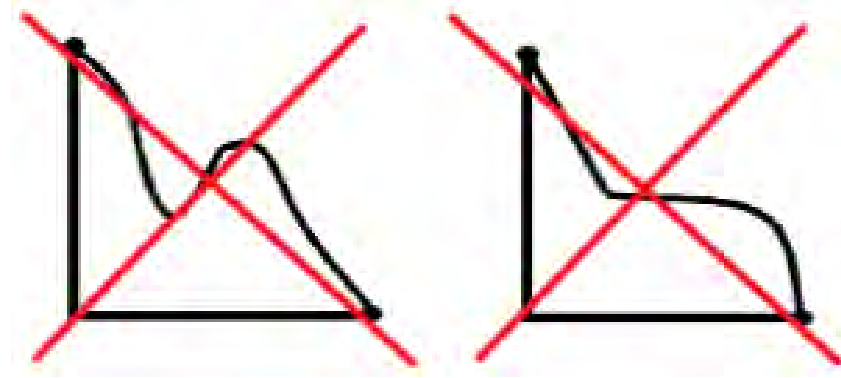
圖十一 改變角度越大，動能的消耗也就越多

(二)、上凸曲線：質點的速度與路徑的坡度成正相關，所以上凸曲線質點的移動速度是由慢到快（圖十二），越接近末端時移動速度越大，但因主要是垂直位移，無法將移動距離最大化，因此上凸曲線也不是答案。



圖十二

(三)、多凹曲線：已知上述否定掉的路徑都將不會為答案，所以上述路徑不會以任何方式、組合出現在答案中（圖十三）。



圖十三

至此，可能的答案只剩下直線與下凹曲線

### (二)、實驗步驟

壓克力軌道的彎曲，是由棉繩的長度所影響，所以依序調整左、中、右三條棉繩的長度，再將小球從高點放開，待其滑落至低點，並全程以手機記錄鐵球在壓克力軌道上的的抵達時間，用 Pr 逐幀找出各自耗時最短的路徑，並用 Ps 與擺線比對，來得到實驗裡的最速降線（近似值），再將壓克力軌道凹成實驗裡的最速降線重新在進行實驗，確認抵達時間是否為所有軌道中最快。（圖十四）



圖十四 左、中、右棉繩

### (三)、變因

1、控制變因：

- (1). 兩點之間的直線距離
- (2). 鐵球與壓克力軌道的摩擦力大小
- (3). 兩點離地面的垂直高度
- (4). 鐵球的質量

2、操縱變因：兩點之間的軌道

3、應變變因：兩點之間不同路徑鐵球抵達的時間

#### 4、 結果與討論

一、中鐵球抵達時間與對應的繩長，以及三條最快軌道與擺線比對的結果。

(一)、鐵球抵達時間與對應的繩長

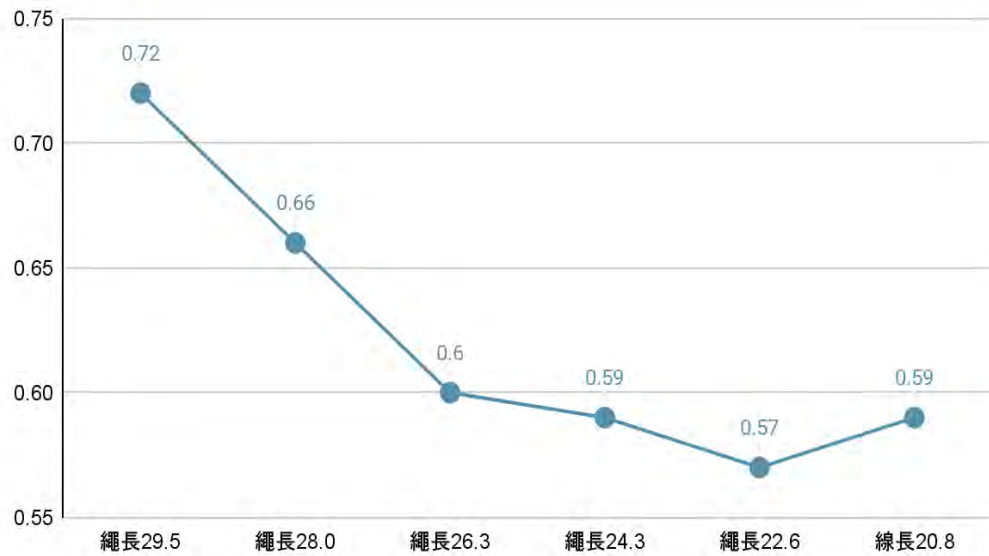
繩長 (公分) 及 編號	第一次結果 (秒)	第二次結果 (秒)	第三次結果 (秒)	平均 (秒) 四 捨五入到小數點 後第二位
直線	0.89	0.90	0.92	0.90

直線的抵達時間，為所有路徑中最長。

繩長 (公分) 及 編號	第一次結果 (秒)	第二次結果 (秒)	第三次結果 (秒)	平均 (秒) 四捨五入到小數 點後第二位
曲線右 繩長 <b>29.5</b>	0.71	0.72	0.73	0.72
曲線右 繩長 <b>28.0</b>	0.65	0.67	0.66	0.66
曲線右 繩長 <b>26.3</b>	0.61	0.61	0.59	0.60
曲線右 繩長 <b>24.3</b>	0.60	0.59	0.59	0.59
曲線右 繩長 <b>22.6</b>	0.56	0.57	0.58	0.57
曲線右 繩長 <b>20.8</b>	0.60	0.58	0.58	0.59

在只控制右邊繩長的實驗中，鐵球在繩長 22.6 公分的軌道中，抵達時間最短。

曲線 右



圖十五 右邊繩長與抵達時間關係圖

繩長 (公分) 及編號	第一次結果 (秒)	第二次結果 (秒)	第三次結果 (秒)	平均 (秒) 四捨五入到小 數點後第二位
曲線 中 繩長 <b>28.1</b>	0.64	0.64	0.63	0.64
曲線 中 繩長 <b>26.5</b>	0.65	0.63	0.63	0.64
曲線 中 繩長 <b>24.8</b>	0.58	0.58	0.59	0.58
曲線 中 繩長 <b>23.8</b>	0.58	0.57	0.57	0.57
曲線 中 繩長 <b>22.9</b>	0.59	0.60	0.57	0.59
曲線 中 繩長 <b>20.9</b>	0.59	0.60	0.59	0.59

在只控制中間繩長的實驗中，鐵球在繩長 23.8 公分的軌道中，抵達時間最短。

曲線 中

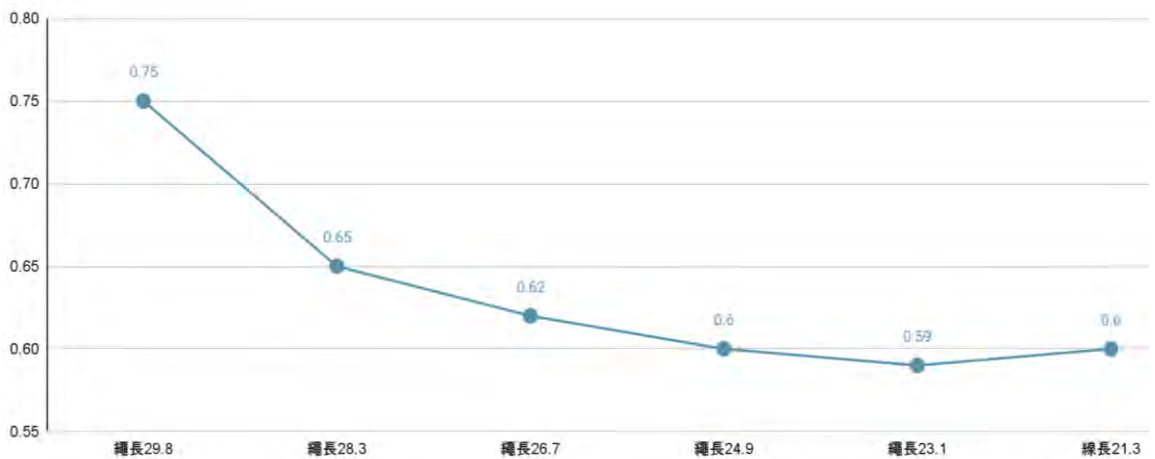


圖十六 中間繩長與抵達時間關係圖

實驗一 繩長 (公分) 及編號	第一次結果 (秒)	第二次結果 (秒)	第三次結果 (秒)	平均 (秒) 四捨五入到小 數點後第二位
曲線 左 繩長 <b>29.8</b>	0.75	0.77	0.73	0.75
曲線 左 繩長 <b>28.3</b>	0.63	0.65	0.66	0.65
曲線 左 繩長 <b>26.7</b>	0.61	0.62	0.63	0.62
曲線 左 繩長 <b>24.9</b>	0.60	0.60	0.60	0.60
曲線 左 繩長 <b>23.1</b>	0.59	0.59	0.59	0.59
曲線 左 繩長 <b>21.3</b>	0.59	0.60	0.61	0.60

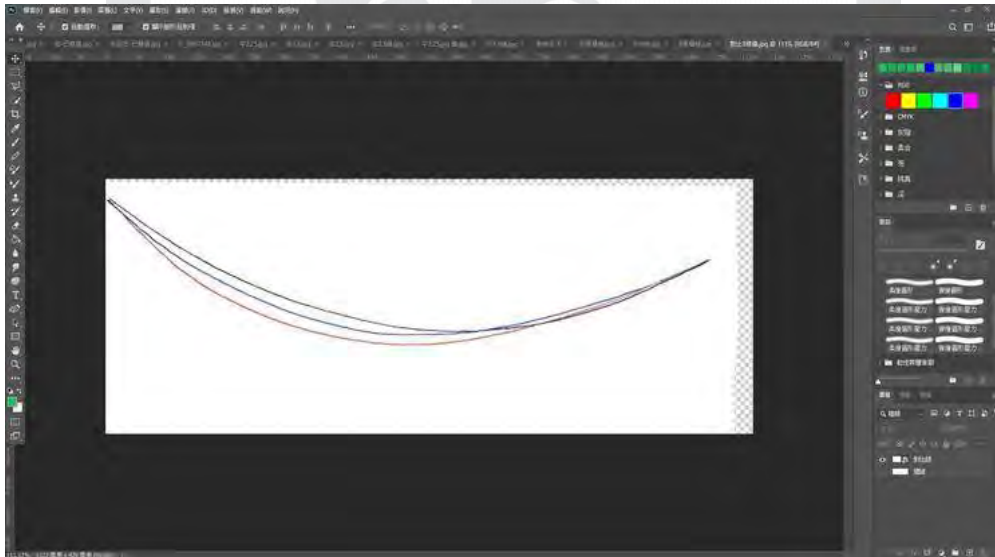
在只控制左邊繩長的實驗中，鐵球在繩長 23.1 公分的軌道中，抵達時間最短。

曲線 左

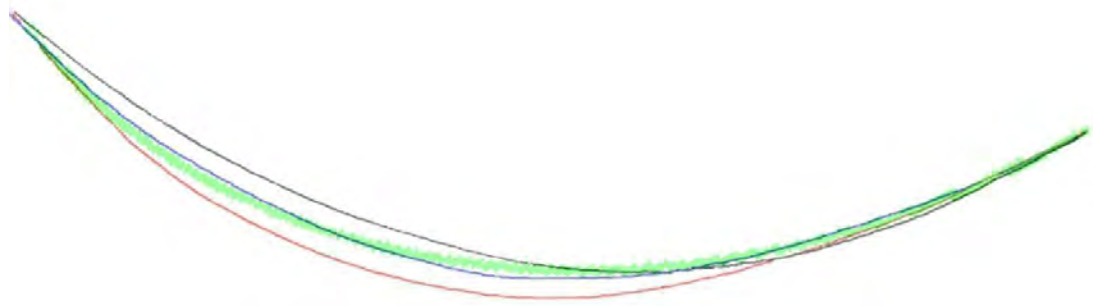


圖十七 中間繩長與抵達時間關係圖

(二)、左、中、右三條最快的路徑分別是繩長：23.1、23.8、22.6（公分），經過 Pr 擷取影片中的圖片，再將圖片由 Ps 描繪出路徑（圖十八），並將頭尾對齊比對得出 $\frac{1}{2}$ 週期擺線大幅相同（圖十九），並用 $\frac{1}{2}$ 週期擺線再做實驗，確認抵達時間確實是所有路徑中最短的。



圖十八 Ps 使用圖



圖十九 綠色為 $\frac{1}{2}$ 週期擺線，黑、紅、藍線分別為左、中、右棉繩實驗出的最快路徑。

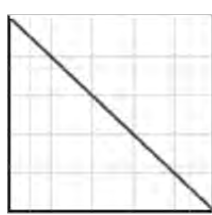
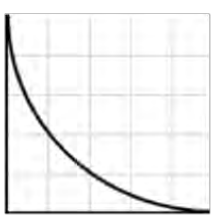
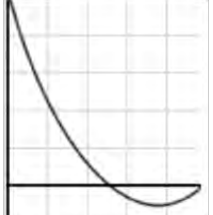
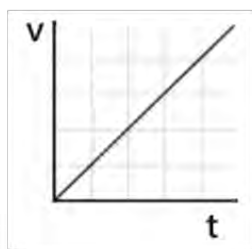
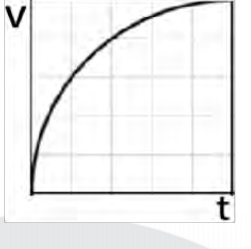
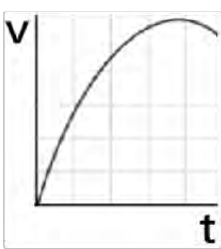
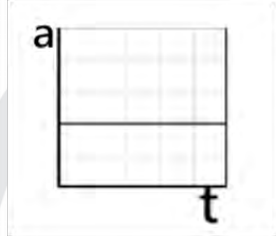
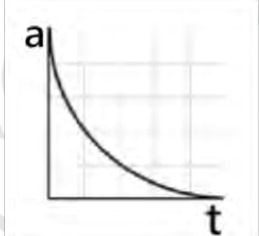
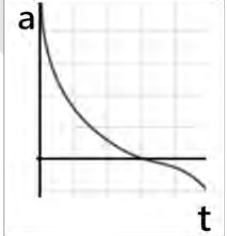
繩長 (公分) 及編號	第一次結果 (秒)	第二次結果 (秒)	第三次結果 (秒)	平均 (秒) 四捨五入到小數點後第二位
$\frac{1}{2}$ 週期擺線	0.56	0.56	0.55	0.56

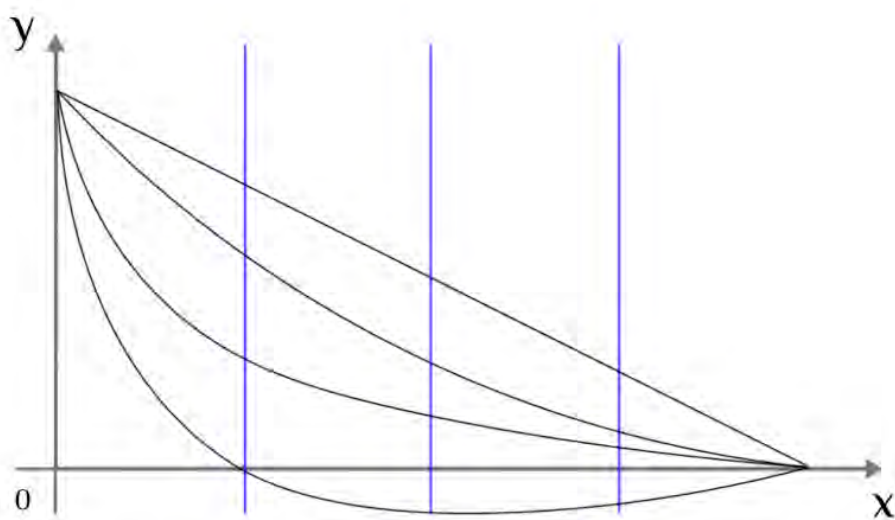
## 5、 討論與結論

### 一、 討論

(一) 整理研究結果得出，隨著路徑下凹彎度越大，鐵球的抵達時間越短。但超過一定限度之後，抵達時間將會增加 (圖十五~圖十七)。我們分析這是因為，根據機械能守恆，物體在重力場中運動時動能和位能之和不變，所以質點無論路徑為和抵達低點時速度都將一至，最速降線問題實質上是在問如何最有效分配動能和位使其成為快路徑。路徑為直線時，質點做等加速度運動，越靠近終點速度越快。速度最快時已在終點，整個過程動能只有增加，卻無法用於移動 (以到達終點)。隨著彎度增加越大，下凹曲線與直線在同一條鉛直線上的交叉點除了起點和終點前者始終高於後者，使其在同一垂直位置時獲得較大的動能，雖然位能減少，但卻在較短的時間內獲得了較大的速度，在之後的時間裡保持著較快的速度，且下凹程度越大在同一垂直位置 (不含起點和終點) 時速度越快，因此抵達時間變短，直到彎度過大，距離增加，抵達時間因而變長為止。

(圖二十) (速度與動能成正相關  $KE = \frac{1}{2} mv^2$ )

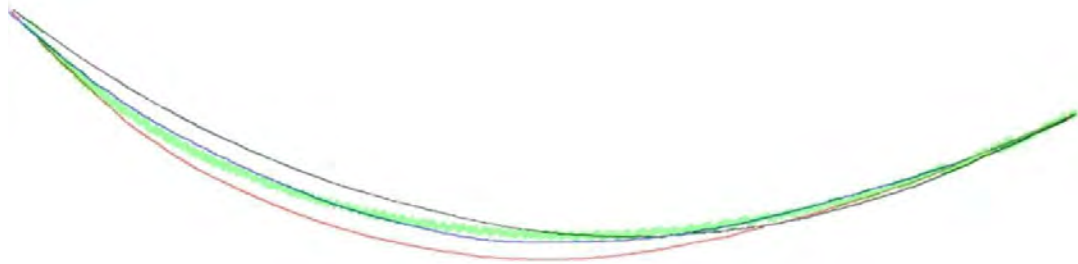
路徑圖			
速度與時間 關係圖			
加速度與時間 關係圖			



圖二十 位能比較示意圖

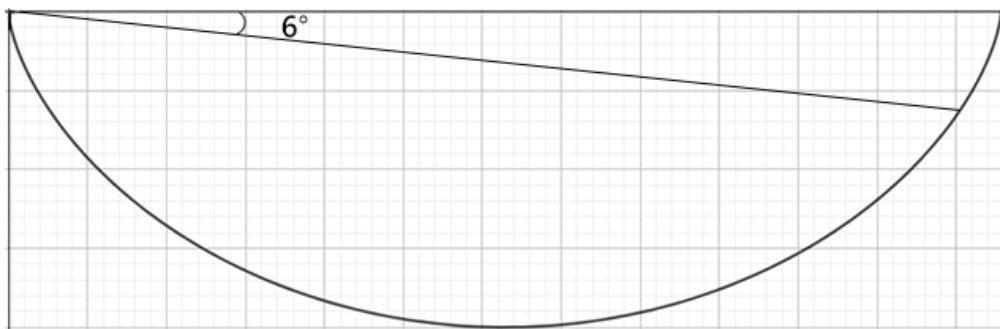
(二)在尋找有摩擦力情況的最速降線時，我們推斷左 23.1 中 23.8 右 22.6 三條能成為各自變因下最快的路徑，一定有共同的原因，在路徑比對圖裡可以發現後半段幾乎重疊，在三條自變因下最快的路徑與擺線的比對中，發現 $\frac{1}{2}$ 週期擺線與三個最快路徑大致相符，接著對 $\frac{1}{2}$ 週期擺線進行實驗，發現確實是所有實驗裡

質點抵達終點時間最短的，因此最速降線問題在此實驗中的答案約為 $\frac{1}{2}$ 週期擺線。（圖二十一）



圖二十一

(三)實驗中的答案（討論二）與理論上在傾斜 6 度情況下的最速降線相差甚遠（圖二十二），另外在實驗的過程中，鐵球在部分過凹的路徑裡無法抵達終點（圖二十三），以上兩點說明了摩擦力對最速降線的影響巨大，也說明了最速降線問題中答案是擺線只存在於理論上。



圖二十二



## 圖二十三

### 二、討論

(一)、用實體實驗模擬最速降線問題，得出各自的最佳路徑，並與擺線加以比對，找出實驗中的最速降線大約為 $\frac{1}{2}$ 週期擺線，這與理論上在傾斜 6 度情況下的最速降線相差甚遠(圖)，同時在實驗的過程中，鐵球在部分過凹的路徑裡無法抵達終點，以上兩點說明了摩擦力對最速降線的影響巨大，也說明了最速降線問題中答案是擺線只存在於理論上。

(二)、觀察質點所經過的路徑對抵達時間的影響分析其原因，原因為依據機械能守恆原理，下凹的曲線與直線相比，則是以犧牲位能，換取動能的方式增加速度，在路徑相當的前提下，在較短時間內抵達終點，但彎度大於一定限度時，路徑將會過長，而使抵達時間增加。

### 三、未來展望與應用

#### (一)、未來展望

1.使用壓克力板作為軌道，會因為其本身的彈性，導致軌道的形變難以控制且無法準確量化，希望未來可以找到更好的材料改善此問題。

#### (二)、最速降線的應用

1. 我們認為可以運用最速降線為兩點間最快的路徑之性質，應用在緊急快速的事物上，例如，幼兒園的逃生溜滑梯，因為孩童的身體還未發育完全，若是在危急時刻，走樓梯會是一種較沒有效率的方法，因此用最速降線搭建逃生溜滑梯可以大幅提升逃生安全、效率 (圖二十四) ；也可以運用在飛機的逃生滑梯

上，加快逃生速度（圖二五）。



圖二十四 此圖為宜蘭市中山國民小學附設幼兒園的逃生溜滑梯



圖二十四 此圖為飛機上的逃生滑梯

#### 參考文獻

變分法上的最速降線之研究 **Calculus of Variation –the Brachistochrone**

Problem 李柏

堅 <http://www.cust.edu.tw/mathmet/brachistochrone.pdf>

翰林第五冊－第 1 章 直線運動－速率與速度

翰林第五冊－第 3 章 功與機械應用－位能與動能

[myPhysicsLab](#)

[Brachistochrone](#)

擺線與軌跡 作者：王一哲 日期：2020/10/29

<https://hackmd.io/@yizhewang/H1Yi3WwOw>

